



УДК 517.983

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ⁵**А.В. Глушак, И.М. Примак**Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Найдены условия однозначной разрешимости краевых задач для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными.

Ключевые слова: краевая задача, дробная производная, однозначная разрешимость.

В данной работе в банаховом пространстве E рассмотрим решение краевых задач для абстрактных дифференциальных уравнений дробного порядка $\alpha \in (0, 1)$, содержащих либо дробную производную Герасимова-Капуто, либо дробную производную Римана-Лиувилля.

Дробная производная Герасимова-Капуто $\partial^\alpha u(t)$ определяется следующим образом:

$$\partial^\alpha u(t) = D^\alpha(u(t) - u(0)),$$

где $D^\alpha u(t) = \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} u(t)$ – дробная производная Римана-Лиувилля [1, с. 44],

$$I^{1-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

– дробный интеграл Римана-Лиувилля, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Исследуем разрешимость краевой задачи

$$\partial^\alpha u(t) = Au(t), \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

$$\mu u(0) - u(T) = u_0. \quad (2)$$

Определение 1. Функция $u(t) \in C([0, T], E)$ такая, что $I^{1-\alpha} u(t) \in C^1((0, T), E)$, называется решением задачи (1), (2), если она удовлетворяет уравнению (1) на интервале $(0, T)$ и краевому условию (2).

Рассмотрим вначале частный случай краевой задачи, когда в уравнении (1) A – ограниченный оператор. Пусть также в условии (2) для любого $\lambda \in \sigma(A)$ ($\sigma(A)$ – спектр

⁵Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 годы (госконтракт № 02.740.11.0613)



оператора A) число $\mu \neq E_\alpha(\lambda T^\alpha)$, где $E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$ ($\alpha > 0$) – функция Миттаг-Леффлера.

По теореме об отображении спектра [2, с. 609] имеет место равенство $\sigma(E_\alpha(T^\alpha A)) = E_\alpha(T^\alpha(\sigma(A)))$, откуда следует существование оператора $(\mu I - E_\alpha(T^\alpha A))^{-1}$, определенного на E .

Пусть $u(t)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(0) = v_0$. Тогда [3, с. 13] $u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)v_0$ при $t \in [0, T]$. Учитывая граничное условие (2), получим уравнение $\mu v_0 - E_\alpha(T^\alpha A)v_0 = u_0$. Следовательно, $v_0 = (\mu I - E_\alpha(T^\alpha A))^{-1}u_0$ и

$$u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)(\mu I - E_\alpha(T^\alpha A))^{-1}u_0. \quad (3)$$

Таким образом, если решение краевой задачи существует, то оно единственно и имеет вид (3). С другой стороны, задаваемая равенством (3) функция $u(t)$ определена при любом $u_0 \in E$ и, как нетрудно проверить, является решением рассматриваемой краевой задачи (1), (2). Мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Пусть A – ограниченный оператор в банаховом пространстве E и для любого $\lambda \in \sigma(A)$, $\mu \neq E_\alpha(\lambda T^\alpha)$. Тогда для любого $u_0 \in E$ решение краевой задачи (1), (2) существует, единственно и имеет вид (3).

Пример 1. Пусть E – пространство комплексных чисел \mathbb{C} , A – оператор умножения на $A \in \mathbb{C}$ и $\mu \neq E_\alpha(AT^\alpha)$. Тогда для любого $u_0 \in \mathbb{C}$ решение краевой задачи (1), (2) единственно и имеет вид

$$u(t) = \frac{E_\alpha(At^\alpha)u_0}{\mu - E_\alpha(AT^\alpha)}.$$

Рассмотрим далее краевую задачу, содержащую дробную производную Римана-Лиувилля

$$D^\alpha v(t) = Av(t), \quad 0 < t < T, \quad (4)$$

$$\mu I^{1-\alpha}v(0) - v(T) = u_0. \quad (5)$$

Определение 2. Функция $v(t) \in C((0, T], E)$ такая, что $I^{1-\alpha}v(t) \in C^1((0, T), E)$, называется решением задачи (4), (5), если она удовлетворяет уравнению (4) на интервале $(0, T)$ и краевому условию (5).

В уравнении (4), по-прежнему, будем считать A ограниченным оператором в банаховом пространстве E . Пусть также в условии (5) для любого $\lambda \in \sigma(A)$, число $\mu \neq T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)$, где $E_{\alpha,\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)}$ ($\alpha > 0$) – функция типа Миттаг-Леффлера. По теореме об отображении спектра имеет место равенство $\sigma(E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A)) = E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha(\sigma(A)))$, откуда следует существование оператора $(\mu I - E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A))^{-1}$, определенного на E .

Пусть $v(t)$ – решение уравнения (4), удовлетворяющее условию $I^{1-\alpha}v(0) = v_0$. Тогда [1, с. 601] $v(t) = T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)v_0$ при $t \in [0, T]$. Учитывая граничное условие (5), получим



$\mu v_0 - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A)v_0 = u_0$. Следовательно, $v_0 = (\mu I - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A))^{-1} u_0$ и

$$v(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)(\mu I - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A))^{-1} u_0. \quad (6)$$

Таким образом, если решение краевой задачи существует, то оно единственно и имеет вид (6). С другой стороны, задаваемая равенством (6) функция $v(t)$ определена при любом $u_0 \in E$ и, как нетрудно проверить, является решением рассматриваемой краевой задачи (4), (5). Проведенные рассуждения доказывают следующую теорему.

Теорема 2. Пусть A – ограниченный оператор в банаховом пространстве E и для любого $\lambda \in \sigma(A)$ $\mu \neq T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)$. Тогда для любого $u_0 \in E$ решение краевой задачи (4), (5) существует, единственно и имеет вид (6).

Полученные в теоремах 1 и 2 результаты при $\alpha = 1$ превращаются в соответствующие результаты работы [4, с. 62]. Решение краевой задачи в этом случае имеет вид

$$u(t) = e^{tA}(\mu I - e^{tA})^{-1} u_0.$$

Пример 2. Пусть E – пространство комплексных чисел \mathbb{C} , A – оператор умножения на $A \in \mathbb{C}$ и $\mu \neq T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)$. Тогда для любого $u_0 \in \mathbb{C}$ решение краевой задачи (4), (5) единственно и имеет вид

$$u(t) = \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha) u_0}{\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(AT^\alpha)}.$$

Перейдем к рассмотрению краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка с неограниченным оператором A .

В дальнейшем будем считать допустимой область G комплексной плоскости, ограниченную кусочно-гладкими кривыми и такую, что для достаточно больших по модулю $\lambda \in G$

$$\arg \lambda \in [\varphi_1, \varphi_2] \cup [\varphi_3, \varphi_4], \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2} < \varphi_3 < \varphi_4 < \frac{3\pi}{2}.$$

Оператор A и параметр μ будут удовлетворять следующему условию.

Условие 1. Область определения $D(A)$ оператора A плотна в E . Существуют допустимая область G , постоянная $K > 0$ и целое число $k \geq -1$, такие что

$$\forall \lambda \notin G \quad \|R(\lambda, A)\| \leq K(1 + |\lambda|)^k,$$

где $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$ и, кроме того, $\mu \notin E_\alpha(T^\alpha \bar{G})$.

Пусть $u(t) = U(t)u_0$ – решение краевой задачи с ограниченным оператором A . В силу теоремы 1 оператор $U(t)$, являющийся функцией ограниченного оператора A и параметра μ , может быть записан в виде контурного интеграла

$$U(t) = E_\alpha(t^\alpha A)(\mu I - E_\alpha(T^\alpha A))^{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A) d\lambda, \quad (7)$$



где ∂G – граница области G , содержащей спектр оператора A , $\mu \notin E_\alpha(T^\alpha \bar{G})$.

Покажем, что решение краевой задачи (1), (2) с неограниченным оператором A при выполнении условия 1 может быть получено в форме контурного интеграла (7).

Теорема 3. Пусть выполнено условие 1 и $u_0 \in D(A^{k+3})$, тогда функция

$$u(t) = U(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A) u_0 d\lambda \quad (8)$$

определена, имеет непрерывную дробную производную порядка α и является решением краевой задачи (1), (2).

□ Покажем, что при $u_0 \in D(A^{k+2})$ функция $U(t)u_0$ определена и непрерывна на $(0, T)$. Возьмем произвольное $\lambda_0 \notin \bar{G}$. Используя тождество Гильберта

$$R(\lambda, A)R(\mu, A) = \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu},$$

для $u_0 \in D(A)$ можно записать

$$\begin{aligned} U(t)u_0 &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A) R(\lambda_0, A) (A - \lambda_0 I) u_0 d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A) (A - \lambda_0 I) u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda_0, A) (A - \lambda_0 I) u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A) (A - \lambda_0 I) u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda. \end{aligned}$$

Функция Миттаг-Леффлера имеет следующую асимптотику [5, с. 43]:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} \exp(z^{1/\alpha}) - \sum_{k=1}^N \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha k)} \frac{1}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right), \quad (9)$$

где $|z| \rightarrow \infty$, $|\arg(z)| \leq \eta$, $\frac{\pi\alpha}{2} < \eta < \min(\pi, \pi\alpha)$ и

$$E_{\alpha, \beta}(z) = -\sum_{k=1}^N \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha k)} \frac{1}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad \eta \leq |\arg(z)| \leq \pi. \quad (10)$$

Применяя лемму Жордана и учитывая (9), (10), для $0 < t < T$ получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda = 0. \quad (11)$$



Таким образом,

$$U(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)}{\lambda - \lambda_0} u_0 d\lambda, \quad t \in (0, T). \quad (12)$$

Учитывая асимптотику функции Миттаг-Леффлера (9), (10), для $t \in [\delta, T]$, $\delta > 0$ и достаточно больших $|\lambda|$ будем иметь оценки

$$\begin{aligned} & \frac{|E_\alpha(\lambda t^\alpha)| \|R(\lambda, A)\|}{|\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)| \cdot |\lambda - \lambda_0|} \leq \\ & \leq \frac{\left| \frac{1}{\alpha} t \lambda^{1/\alpha} e^{t \lambda^{1/\alpha}} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha k)} \frac{1}{(\lambda t^\alpha)^k} + O\left(\frac{1}{(\lambda t^\alpha)^{N+1}}\right) \right|}{\left| \mu - \frac{1}{\alpha} T \lambda^{1/\alpha} e^{T \lambda^{1/\alpha}} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha k)} \frac{1}{(\lambda T^\alpha)^k} - O\left(\frac{1}{(\lambda T^\alpha)^{N+1}}\right) \right|} \cdot \frac{K}{|\lambda| |\lambda - \lambda_0|} \leq \\ & \leq \frac{|T \lambda^{1/\alpha} e^{T \lambda^{1/\alpha}}|}{|\mu - T/\alpha \lambda^{1/\alpha} e^{T \lambda^{1/\alpha}}|} \cdot \frac{K_1}{|\lambda| |\lambda - \lambda_0|}, \quad |\arg(\lambda t^\alpha)| \leq \eta, \quad \eta \in (\pi\alpha/2, \pi\alpha), \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{|E_\alpha(\lambda t^\alpha)| \|R(\lambda, A)\|}{|\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)| \cdot |\lambda - \lambda_0|} \leq \\ & \leq \frac{\left| -\sum_{k=1}^N \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha k)} \frac{1}{(\lambda t^\alpha)^k} + O\left(\frac{1}{(\lambda t^\alpha)^{N+1}}\right) \right|}{\left| \mu + \sum_{k=1}^N \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha k)} \frac{1}{(\lambda T^\alpha)^k} - O\left(\frac{1}{(\lambda T^\alpha)^{N+1}}\right) \right|} \cdot \frac{K}{|\lambda| |\lambda - \lambda_0|} \leq \\ & \leq \frac{1}{|\mu|} \cdot \frac{K_1}{|\lambda| |\lambda - \lambda_0|}, \quad \eta \leq |\arg(\lambda t^\alpha)| \leq \pi. \quad (14) \end{aligned}$$

Очевидно, неравенства вида (13), (14) имеют место и для $t \in [0, \delta]$. Следовательно, при $k = -1$ интеграл в (12) равномерно сходится по $t \in [0, T]$ и определяет непрерывную на $[0, T]$ функцию.

Выполним аналогичное преобразование еще раз и получим

$$\begin{aligned} U(t)u_0 &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)R(\lambda_0, A)(A - \lambda_0 I)^2 u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^2 u_0}{(\lambda - \lambda_0)^2} d\lambda + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda_0, A)(A - \lambda_0 I)^2 u_0}{(\lambda - \lambda_0)^2} d\lambda = \\
 & = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^2 u_0}{(\lambda - \lambda_0)^2} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{(A - \lambda_0 I) u_0}{(\lambda - \lambda_0)^2} d\lambda.
 \end{aligned}$$

Аналогично равенству (11) устанавливается, что

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{(A - \lambda_0 I) u_0}{(\lambda - \lambda_0)^2} d\lambda = 0, \\
 & U(t) u_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^2 u_0}{(\lambda - \lambda_0)^2} d\lambda.
 \end{aligned}$$

Последний интеграл определяет непрерывно дифференцируемую на $[0, T]$ функцию.

При $k > -1$ указанные преобразования следует повторить $k + 1$ раз. В результате для $u_0 \in D(A^{k+2})$ получим представление

$$U(t) u_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} d\lambda, \quad t \in [0, T]. \quad (15)$$

Из ограниченности оператора $U(t)$ на плотном в E подмножестве $D(A^{k+2})$ следует его ограниченность на всем E [6, с. 130], что позволяет получить непрерывную зависимость решения задачи (1), (2) от значения u_0 . Для построенного продолжения имеем

$$\begin{aligned}
 (\mu U(0) - U(T)) u_0 &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\mu}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} d\lambda + \\
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda T^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} d\lambda = \\
 & = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} d\lambda,
 \end{aligned}$$

где подынтегральная функция аналитична по $\lambda \in C \setminus \bar{G}$, $\lambda \neq \lambda_0$, непрерывна по $\lambda \in \partial G$ и убывает на бесконечности как $|\lambda|^{-2}$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned}
 (\mu U(0) - U(T)) u_0 &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda = \\
 & = \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}} R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2} u_0 = u_0,
 \end{aligned}$$



и, стало быть, $U(t)u_0$ удовлетворяет краевому условию (2).

Покажем, что при $t \in (0, T)$ $U(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (1). Учитывая замкнутость оператора A , $\forall u_0 \in D(A^{k+2})$ и $\forall \lambda \in \partial G$, получим $U(t)u_0 \in D(A^{k+2})$ и

$$\begin{aligned} AU(t)u_0 &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{AE_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \left(\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} + \frac{\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A) \right) \frac{(A - \lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{(A - \lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)(\lambda - \lambda_0)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{(A - \lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda - \lambda_0)^{k+3}} u_0 d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda. \end{aligned}$$

Аналогично равенству (11) для $t \in (0, T)$, устанавливается равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{(A - \lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{k+3}} d\lambda = 0,$$

поэтому

$$AU(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda. \quad (16)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \partial^\alpha U(t)u_0 &= D^\alpha(U(t) - U(0))u_0 = D^\alpha U(t)u_0 - \frac{U(0)}{\Gamma(1 - \alpha)} t^{-\alpha} = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} D^\alpha \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} d\lambda - \frac{U(0)}{\Gamma(1 - \alpha)} t^{-\alpha} = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{-\alpha} E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} d\lambda + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{-\alpha}}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(\lambda - \lambda_0)^{k+2} u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} d\lambda. \end{aligned} \quad (17)$$

Применяя в (17) равенство $E_{\alpha, \beta}(t) - \frac{1}{\Gamma(\beta)} = tE_{\alpha, \alpha+\beta}(t)$ [5, с. 45] и учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{-\alpha}}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(\lambda - \lambda_0)^{k+2} u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} d\lambda = 0,$$



получим

$$\partial^\alpha U(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda = AU(t)u_0.$$

Таким образом, функция $U(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (1). ■

Приведем далее достаточное условие единственности полученного в теореме 3 решения. Теорему единственности мы докажем путем аппроксимации задачи (1), (2) задачами

$$\partial^\alpha u_n(t) = A_n u_n(t), \quad t \in (0, T), \quad (18)$$

$$\mu u_n(0) - u_n(T) = u_0. \quad (19)$$

с ограниченными операторами A_n .

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и оператор A является сильным пределом последовательности ограниченных коммутирующих друг с другом операторов A_n таких, что

$$\|E_{\alpha, \alpha}(t^\alpha A_n)\| \leq M_1 e^{\omega t}, \quad (20)$$

и для $\mu \notin E_\alpha(T^\alpha \bar{G})$

$$\|(\mu I - E_\alpha(T^\alpha A_n))^{-1}\| \leq M_2 \quad (21)$$

с постоянными $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ и ω не зависящими от n . Тогда определяемое равенством (8) решение задачи (1), (2) единственно.

□ Пусть $u(t)$ – решение задачи (1), (2), а $u_n(t)$ – решение задачи (18), (19). Тогда функция $w_n(t) = u(t) - u_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial^\alpha w_n(t) = A_n w_n(t) + (A - A_n)u(t), \quad t \in (0, T)$$

и нулевому краевому условию

$$\mu w_n(0) - w_n(T) = 0.$$

Поскольку оператор A_n ограничен, то подобно тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1, запишем соотношение

$$w_n(t) = E_\alpha(t^\alpha A_n)(\mu I - E_\alpha(T^\alpha A_n))^{-1} W_n(T) + W_n(t), \quad (22)$$

где

$$W_n(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha A_n) (A - A_n)u(s) ds. \quad (23)$$

Учитывая оценку (20) и равномерное по $t \in [0, T]$ стремление к нулю последовательности $(A - A_n)u(t)$, из (23) вытекает равномерное по $t \in [0, T]$ стремление к нулю последовательности $W_n(t)$, а из (20)-(22) – последовательности $w_n(t) = u(t) - u_n(t)$.



Итак, рассматриваемое решение $u(t)$ задачи (1), (2) является пределом последовательности $u_n(t)$ и, следовательно, определяется единственным образом. ■

Другое достаточное условие единственности решения задачи (1), (2) можно попытаться найти следующими рассуждениями. Пусть $u(t)$ — решение краевой задачи

$$\partial^\alpha u(t) = Au(t) \quad (0 < t < T), \quad \mu u(0) - u(T) = 0.$$

Обозначим через $L_\alpha(\lambda) = E_\alpha(\lambda T^\alpha) - \mu$ и пусть λ_0 — ее нуль. Поскольку функция Миттаг-Леффлера при $\alpha \neq 1$ не имеет пикаровских исключительных значений (см. [7, с. 150]), то такое λ_0 всегда существует.

В работе [4, с. 65] доказано, что единственность решения задачи (1), (2) при $\alpha = 1$ зависит от взаимного расположения собственных значений оператора A и нулей функции $L_1(\lambda)$ — они не должны совпадать.

Определим векторно-значную целую функцию

$$f_\alpha(\lambda) = \int_0^T s^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda s^\alpha) u(s) ds.$$

Если λ_0 не является собственным значением оператора A , то $Af_\alpha(\lambda_0) = \lambda_0 f_\alpha(\lambda_0) - L_\alpha(\lambda_0) u(0)$ и, следовательно, $f_\alpha(\lambda_0) = 0$.

Введем в рассмотрение скалярную функцию $\Upsilon_\alpha(\lambda) = \frac{h(f_\alpha(\lambda))}{L_\alpha(\lambda)}$, где h — линейный непрерывный функционал на E . В работе [8] при $\alpha = 1$ путем анализа нулей функции $f_1(\lambda)$ методом частных для функции $\Upsilon_1(\lambda)$ установлено равенство $u(t) \equiv 0$. Таким образом, проблема единственности решения задачи (1), (2) может быть сведена к распространению метода частных для функции $\Upsilon_\alpha(\lambda)$ при $\alpha \neq 1$.

Пример 3. Пусть оператор A является генератором аналитической полугруппы $Q(t)$. Тогда [9, с. 266]

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{K}{1 + |\lambda|}, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq \sigma,$$

а допустимая область G — область, лежащая слева от контура ∂G , состоящего из двух лучей $\lambda = \sigma + \rho e^{i\gamma}$ и $\lambda = \sigma + \rho e^{-i\gamma}$, где $0 \leq \rho < \infty$, γ — любое число из промежутка $(\pi/2, \pi/2 + \arcsin 1/K)$, обход контура производится из нижней полуплоскости в верхнюю.

В силу теоремы 3 для $u_0 \in D(A^2)$ и $\mu \notin E_\alpha(T^\alpha \bar{G})$, функция

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \int_0^\infty e^{-\lambda \tau} Q(\tau) u_0 d\tau d\lambda$$

является решением задачи (1), (2). Поскольку оператор A является сильным пределом последовательности ограниченных коммутирующих друг с другом операторов [10, с. 64], то, в силу теоремы 4, указанное решение является единственным.



Установим далее результаты, аналогичные теоремам 3 и 4 для краевой задачи (4), (5), содержащей дробную производную Римана-Лиувилля.

Оператор A и параметр μ будут удовлетворять следующему условию.

Условие 2. Область определения $D(A)$ оператора A плотна в E . Существуют допустимая область G , постоянная $K > 0$ и целое число $k \geq -1$, такие что

$$\forall \lambda \notin G \quad \|R(\lambda, A)\| \leq K(1 + |\lambda|)^k,$$

и, кроме того, $\mu \notin T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha \overline{G})$.

Пусть $v(t) = V(t)u_0$ – решение краевой задачи с ограниченным оператором A . По теореме 2 оператор $V(t)$, являющийся функцией ограниченного оператора A и параметра μ , может быть записан в виде контурного интеграла

$$V(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A) d\lambda, \quad (24)$$

где ∂G – граница области G , содержащей спектр оператора A , $\mu \notin E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha \overline{G})$.

Покажем, что решение краевой задачи (4), (5) с неограниченным оператором A при выполнении условия 2 может быть получено в форме контурного интеграла (24).

Теорема 5. Пусть выполнено условие 2 и $u_0 \in D(A^{k+2})$, тогда функция

$$v(t) = V(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A) u_0 d\lambda, \quad (25)$$

определена, имеет непрерывную дробную производную порядка α при $t \in (0; T)$ и является решением краевой задачи (4), (5).

□ Докажем, что при $u_0 \in D(A^{k+2})$ функция $V(t)u_0$ определена и непрерывна на $(0, T]$. Возьмем произвольное $\lambda_0 \notin \overline{G}$. Используя тождество Гильберта, для $u_0 \in D(A)$ можно записать

$$\begin{aligned} V(t)u_0 &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A) R(\lambda_0, A) (A - \lambda_0 I) u_0 d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A) (A - \lambda_0 I) u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda_0, A) (A - \lambda_0 I) u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A) (A - \lambda_0 I) u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda + \end{aligned}$$



$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda. \quad (26)$$

Применяя лемму Жордана, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda = 0, \quad t \in (0, T]. \quad (27)$$

Откуда,

$$V(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)}{\lambda - \lambda_0} u_0 d\lambda, \quad t \in (0, T]. \quad (28)$$

Учитывая асимптотику функции Миттаг-Леффлера (9), (10), для $t \in [0, T]$ и достаточно больших $|\lambda|$ запишем оценки

$$\begin{aligned} & \frac{|t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t)| \|R(\lambda, A)\|}{|\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T)| |\lambda - \lambda_0|} \leq \\ & \frac{t^{\alpha-1} \left| \frac{1}{\alpha} (\lambda t^\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} e^{t\lambda^{1/\alpha}} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{\Gamma(\alpha - \alpha k)} \frac{1}{(\lambda t^\alpha)^k} + O\left(\frac{1}{(\lambda t^\alpha)^{N+1}}\right) \right|}{\left| \mu - T^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\alpha} (\lambda T^\alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} e^{T\lambda^{1/\alpha}} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{\Gamma(\alpha - \alpha k)} \frac{1}{(\lambda T^\alpha)^k} - O\left(\frac{1}{(\lambda T^\alpha)^{N+1}}\right) \right) \right|} \frac{K}{|\lambda| |\lambda - \lambda_0|} \leq \\ & \leq \frac{\left| \lambda^{(1-\alpha)/\alpha} e^{T\lambda^{1/\alpha}} \right|}{\left| \mu - 1/\alpha \lambda^{1/\alpha-1} e^{T\lambda^{1/\alpha}} \right|} \frac{K_1}{|\lambda| |\lambda - \lambda_0|}, \quad |\arg(\lambda t^\alpha)| \leq \eta, \quad \eta \in (\pi\alpha/2, \pi), \quad (29) \\ & \frac{|t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t)| \|R(\lambda, A)\|}{|\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T)| |\lambda - \lambda_0|} \leq \\ & \leq \frac{t^{\alpha-1} \left| -\sum_{k=1}^N \frac{1}{\Gamma(\alpha - \alpha k)} \frac{1}{(\lambda t^\alpha)^k} + O\left(\frac{1}{(\lambda t^\alpha)^{N+1}}\right) \right|}{\left| \mu + T^{\alpha-1} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{\Gamma(\alpha - \alpha k)} \frac{1}{(\lambda T^\alpha)^k} - O\left(\frac{1}{(\lambda T^\alpha)^{N+1}}\right) \right) \right|} \frac{K}{|\lambda| |\lambda - \lambda_0|} \leq \frac{K}{|\mu| |\lambda| |\lambda - \lambda_0|}, \quad (30) \end{aligned}$$

где $\eta \leq |\arg(\lambda t^\alpha)| \leq \pi$.

Из (29), (30) следует, что при $k = -1$ интеграл (28) сходится равномерно по $t \in [0, T]$ и определяет непрерывную на $[0, T]$ функцию.

Выполняя подобное преобразование еще раз, получим

$$V(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda =$$



$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A) R(\lambda_0, A) (A - \lambda_0 I)^2 u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda = \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A) (A - \lambda_0 I)^2 u_0}{(\lambda - \lambda_0)^2} d\lambda + \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda_0, A) (A - \lambda_0 I)^2 u_0}{(\lambda - \lambda_0)^2} d\lambda = \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A) (A - \lambda_0 I)^2 u_0}{(\lambda - \lambda_0)^2} d\lambda + \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{(A - \lambda_0 I) u_0}{(\lambda - \lambda_0)^2} d\lambda.
\end{aligned}$$

Аналогично равенству (11), имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{(A - \lambda_0 I) u_0}{(\lambda - \lambda_0)^2} d\lambda = 0,$$

поэтому

$$V(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A) (A - \lambda_0 I)^2 u_0}{(\lambda - \lambda_0)^2} d\lambda.$$

При $k > -1$ указанные преобразования следует повторить $k + 1$ раз и мы получим

$$V(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A) (A - \lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} d\lambda, \quad t \in [0, T]. \quad (31)$$

Из ограниченности $V(t)$ на плотном подмножестве $D(A^{k+2})$ следует его ограниченность на E . Для построенного продолжения имеем

$$\begin{aligned}
(\mu I^{1-\alpha}(V(0)) - V(T))u_0 &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\mu I^{1-\alpha}(t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha))|_{t=0}}{\mu - E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A) (A - \lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} d\lambda + \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)}{\mu - E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A) (A - \lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} d\lambda = \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\mu(E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha))|_{t=0}}{\mu - E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A) (A - \lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} d\lambda + \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)}{\mu - E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A) (A - \lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} d\lambda =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\mu - E_{\alpha, \alpha}(\lambda T^\alpha)}{\mu - E_{\alpha, \alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} d\lambda,$$

где подынтегральная функция аналитична по $\lambda \in C \setminus \overline{G}$, $\lambda \neq \lambda_0$, непрерывна по $\lambda \in \partial G$ и убывает на бесконечности как $|\lambda|^{-2}$. Поэтому имеем

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda = \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}} R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2} u_0 = u_0,$$

следовательно, $V(t)u_0$ удовлетворяет краевому условию (5).

Покажем, что при $t \in (0; T)$ $V(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (4). Учитывая замкнутость оператора A и равенство (11) для $u_0 \in D(A^{k+2})$ и $\lambda \in \partial G$, получим $V(t)u_0 \in D(A^{k+2})$. Кроме того,

$$\begin{aligned} AV(t)u_0 &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{At^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \left(\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\lambda T^\alpha)} + \frac{\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A) \right) \frac{(A - \lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{(A - \lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} D^\alpha V(t)u_0 &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dt} \int_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha, \alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda - \lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda = AV(t)u_0, \end{aligned}$$

следовательно, функция $V(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (4). ■

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 5 и оператор A является сильным пределом последовательности ограниченных коммутирующих друг с другом операторов A_n таких, что

$$\|E_{\alpha, \alpha}(t^\alpha A_n)\| \leq M_3 e^{\omega t}, \quad (32)$$



и для $\mu \notin T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha \bar{G})$

$$\|(\mu I - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A_n))^{-1}\| \leq M_4 \quad (33)$$

с постоянными $M_3 > 0$, $M_4 > 0$ и ω не зависящими от n . Тогда решение задачи (4),(5), определяемое равенством (24), единственно.

□ Пусть $v(t)$ – решение задачи (4), (5), а $v_n(t)$ – решение задачи

$$D^\alpha v_n(t) = A_n v_n(t), \quad 0 < t < T, \quad (34)$$

$$\mu I^{1-\alpha} v_n(0) - v_n(T) = u_0, \quad (35)$$

с ограниченными операторами A_n . Тогда функция $w_n(t) = v(t) - v_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$D^\alpha w_n(t) = A_n w_n(t) + (A - A_n)v(t), \quad t \in (0, T)$$

и нулевому краевому условию

$$\mu I^{1-\alpha} w_n(0) - w_n(T) = 0.$$

Поскольку оператор A_n ограничен, то аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 2, запишем соотношение

$$w_n(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A_n)(\mu I^{1-\alpha} - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A_n))^{-1}W_n(T) + W_n(t), \quad (36)$$

где

$$W_n(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A_n)(A - A_n)v(s) ds. \quad (37)$$

Учитывая оценку (32) и равномерное по $t \in [0, T]$ стремление к нулю последовательности $(A - A_n)v(t)$, из (37) вытекает равномерное по $t \in [0, T]$ стремление к нулю последовательности $W_n(t)$, а из (32), (33), (36) – последовательности $w_n(t) = v(t) - v_n(t)$.

Итак, рассматриваемое решение $v(t)$ задачи (4), (5) является пределом последовательности $v_n(t)$ и, следовательно, определяется единственным образом. ■

Пример 4. Пусть оператор A является генератором аналитической полугруппы $Q(t)$. Тогда (см. пример 3)

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{K}{1 + |\lambda|}, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq \sigma,$$

а допустимая область G – область, лежащая слева от контура ∂G , состоящего из двух лучей $\lambda = \sigma + \rho e^{i\gamma}$ и $\lambda = \sigma + \rho e^{-i\gamma}$, где $0 \leq \rho < \infty$, γ – любое число из промежутка $(\pi/2, \pi/2 + \arcsin 1/K)$, обход контура производится из нижней полуплоскости в верхнюю.



В силу теоремы 5 для $u_0 \in D(A^2)$ и $\mu \notin T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha \bar{G})$, функция

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \int_0^\infty e^{-\lambda \tau} Q(\tau) u_0 \, d\tau d\lambda$$

является решением задачи (4), (5). Так как оператор A является сильным пределом последовательности ограниченных коммутирующих друг с другом операторов, то в силу теоремы 6 указанное решение является единственным.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко. – Минск: Наука и техника, 1987.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы (общая теория) / Н. Данфорд. – М.: ИЛ. – 1962.
3. Bajlekova E. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces / Ph. D. Thesis / Eindhoven University of Technology, 2001.
4. Иванов В.К., Мельникова И.В., Филингов А.И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов. – М.: Физматлит. – 1995.
5. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differential equations / A.A. Kilbas. – Math. Studies 204. – Elsevier, 2006.
6. Треногин В.А., Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980.
7. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций / А.А. Гольдберг. – М.: Наука, 1970.
8. Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С. Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым // Математические заметки. – 77; 2. – С.273-290.
9. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1966.
10. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М.: Наука, 1967.



BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

A.V. Glushak, I.M. Primak

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. Conditions of unique solvability of boundary value problems are found for abstract differential equations with fractional derivatives.

Key words: boundary value problem, fractional derivative, unique solvability.